

考虑库仑阻尼时叶盘系统 振动响应的求解方法

北京航空航天大学 李琳^{**}

【摘要】 本文研究了具有干摩擦阻尼的带冠叶盘系统振动响应的求解问题。解决了时频法中由于叠混和泄漏而使迭代发散的问题。最后用时频法获得了令人满意的响应计算结果。

主题词: 非线性系统 振动 响应 摩擦 阻尼

分类号: V231.92

1 引言

在现代航空发动机中常常采用带冠叶片。其作用之一是利用叶冠间的摩擦力减小叶盘系统的振动。然而摩擦力的引入使得叶盘系统振动响应的分析变得复杂得多。这主要是因为具有干摩擦阻尼(即库仑阻尼)的系统是一个非线性系统。而分析非线性系统振动特性的关键一步是对非线性系统的求解。目前时域上的直接积分仍被普遍认为是解非线性方程组的最为精确的方法。然而由于时间步长及积分时间的选取时常要随系统参数改变,十分不利于系统化、自动化的分析与研究。而且对于小阻尼多自由度系统为了获得稳态响应所需的计算时间,即使是在计算机技术高度发展的今天也是常常令人难以接受的。因而寻求和开发更为行之有效的方法一直是学者们研究的课题。对于具有库仑阻尼系统的响应问题,谐波平衡法(HBM)可以称得上是应用最为普遍的方法。在早期的谐波平衡法中,人们仅考虑各动态变量中的一次谐波。后来Lau等人又发展了被称之为增量谐波平衡法(IHM)的多谐波技术。然而与摄动法类似的是,在此技术中随着所考虑的谐波数的增加方程迅速变得复杂起来。Pierre和Dowell应用IHM法分析了板的动态稳定性问题;后来Pierre等人对该方法又做了进一步改进,用来对具有两自由度的干摩擦系统进行了分析^[1]。除了谐波平衡法外,另一个可对干摩擦系统进行多谐波分析的方法是时频法(AFT)。Cameron和Griffin对此方法进行了仔细研究,并应用此方法对单自由度干摩擦系统进行了研究^[2]。与IHM相比,时频法似乎更为通用,更适合编程。特别是这种方法可以使我们在时间、频率两域上分析结果。这种方法的弊病是需在时域和频域之间反复切换,必须仔细处理好叠混和泄漏引起的误差。

带冠叶盘的振动问题特别是非协调系统的振动问题是具有多个摩擦单元的多谐波分析问题。这一问题要比上面所提到的单自由度系统的多谐波问题和多个摩擦单元的单谐波分析要复杂得多。考虑到时频法本身与谐波数和摩擦单元数无关,而且由于FFT技术及计算机技术

的发展,时频切换对方法应用的限制也愈来愈不重要。作者尝试了用时频法求解带冠叶盘的响应问题,其中引用了多谐波变量假设,较好地解决了由于叠混和泄漏引起的发散问题。

2 AFT 方法原理

方程(1)为一非线性系统的运动方程,右端项中除了外部激振力 $f(t)$ 外还有非线性项 $N_f(x, \dot{x})$ 。式中 $L\{\}$ 为线性微分算子。

$$L\{x(t)\} = f(t) + N_f(x, \dot{x}) \quad (1)$$

对方程(1)两端做 Fourier 变换得:

$$H(\omega) \cdot X(\omega) = F(\omega) + \eta(\omega, X(\omega)) \quad (2)$$

式中: $H(\omega)$ 为 L 的 Fourier 变换,它是 ω 的函数; X, F, η 分别为 $x(t), f(t)$ 和 $N_f(x, \dot{x})$ 的 Fourier 变换。在数值计算中 ω 取离散值 $\omega = 2\pi k/(n \cdot \Delta t), k = 1, 2, \dots, n/2$ 。式中: Δt 为样本间隔, n 为快速 Fourier 变换(FFT)中所取的离散点数。

如果获得了 η ,则从式(2)中不难求得 $X(\omega)$ 。然而,由于 $x, \dot{x}$ 还未求得,因此 $N_f(x, \dot{x})$ 实际上是 t 的未知函数,也就是说我们无法取 $N_f(x, \dot{x})$ 的 Fourier 变换,以获得 $\eta(\omega, X(\omega))$ 。为了求得 $N_f(t)$,我们先假设一个 $X(\omega)$,通过 Fourier 逆变换得到 $x(t)$,代入方程(1),再对方程(1)做 Fourier 变换解得 $X(\omega)$ 。如此反复迭代,直至 $X(\omega)$ 收敛。AFT 的迭代框图示于图 1 中。 $X(\omega)$ 的初值可取 $\eta = 0$ 时方程(2)的解。

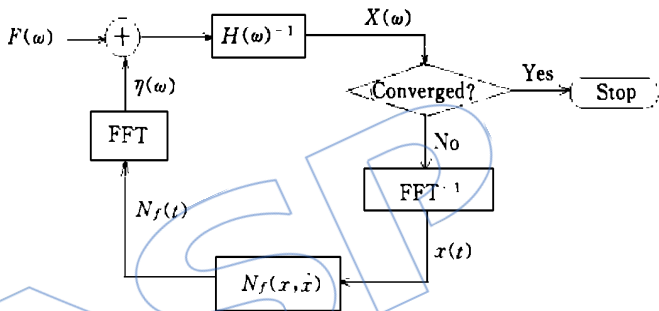


图 1 AFT 方法的迭代框图

3 关于叠混和泄漏误差的处理

AFT 方法的原理并不复杂,但实施起来却由于 FFT 计算中的叠混和泄漏误差的影响使计算结果难以收敛。叠混是由于在 Fourier 分析最高频率以外的功率谱不为零又折返叠加到 Fourier 分析的功率谱上引起的误差。一般来说,叠混误差不可能完全消除,但可以通过适当加大频率分析范围对其进行限制。我们知道 $f_{\max} = n/T$ (T 为信号在时域上的截取时间)。当时域上的截取时间一定时 $f_{\max}$ 与样本数 n 成正比。因此增加信号 $x(t)$ 的离散点数,可减少叠混误差。泄漏是当离散 Fourier 变换的频率值未精确等于非零功率谱所对应的频率所引起的误差。对于线性系统时域上的周期信号,当时间截取长度恰好等于周期的倍数时即可消除泄漏误差。而对于非线性系统,其响应频率成份中不仅有激振力的频率而且出现激振力的倍频或次谐波频率。而信号的时间截取长度不可能同时满足各个谐波周期的倍数。因此对于非线性系统泄漏误差也是不可避免的。为了限制其随迭代次数而发散,我们引入变量的多谐波表达式。即设变量具有如下形式:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{k\pi}{T} t \right) \quad (3)$$

式中: a_0, a_k 和 b_k 为 Fourier 系数。

式(3)的 Fourier 变换式为:

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{n/2} c_k \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{T}\right) \quad (4)$$

式(4)就是 $x(t)$ 的频谱表达式。与式(4)对应的频谱上, $\omega \neq k\omega$ 所对应的谱分量 = 0。这里 k 为整数, k 的最大值为离散点数的 $1/2$; ω 为激振频率。特别是在分析中我们还可以做一个时间变量代换, 即令 $\tau = \omega t$ 。则在新的时域上, 激振力的频率恒为 1。于是根据变量的多谐波假设, 对于响应功率谱, 我们仅保留对应于频率 1, 2, 3, $\dots$ 的谱分量, 略去其余分量。配合以适当的离散点数, 就可以得到满意的收敛结果。

4 带冠叶盘系统的振动响应

考虑库仑阻尼的带冠叶盘系统的二维子结构循环模型如图 2 所示。与其对应的运动方程为:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i + c_{xx} \dot{x}_i + c_{xy} \dot{y}_i + k_{xx} x_i + k_{xy} y_i + k_{di}(x_{i+1} - x_i) + k_{d(i-1)}(x_i - x_{i-1}) &= p_i(t) \\ m_i \ddot{y}_i + c_{yx} \dot{x}_i + c_{yy} \dot{y}_i + k_{yx} x_i + k_{yy} y_i &= f_{ni} - f_{n(i-1)} \end{aligned} \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} k_{xx} &= k_i \sin^2 \alpha + k_{ci} \sin^2 \beta, & k_{yy} &= k_i \cos^2 \alpha + k_{ci} \cos^2 \beta \\ k_{xy} &= k_{ci} \sin \beta \cos \beta - k_i \sin \alpha \cos \alpha, & k_{yx} &= k_{xy}, & c_{xx} &= c_i \sin^2 \alpha \\ c_{xy} &= - (c_i / 2) \sin 2\alpha, & c_{yx} &= c_{xy}, & c_{yy} &= c_i \cos^2 \alpha \quad i = 1, 2, \dots, \bar{n} \end{aligned}$$

根据系统的循环特性

$$\begin{cases} x_{\bar{n}+1} = x_1 \\ y_{\bar{n}+1} = y_1 \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} x_{1-1} = x_{\bar{n}} \\ y_{1-1} = y_{\bar{n}} \end{cases}$$

式中 f_{ni} 为第 i 个摩擦单元的摩擦力:

$$f_{ni} = \mu N_i \operatorname{sgn}(\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i)$$

μ 为摩擦系数, N_i 为摩擦面间的正压力, 它与周向位移成正比:

$$= \begin{cases} N_0 + k_d(x_{i+1} - x_i) & x > -N_0/k_d \\ 0 & x \leq -N_0/k_d \end{cases}$$

显然 $x_{i+1} - x_i \leq N_0/k_{di}$ 对应着叶冠间的瞬时间隙。

系统所受的外部激振力设为对应于发动机某阶次激振力的富里叶分量。第 i 个叶片所承受的外力的表达式为:

$$p_i(t) = p \sin(K\omega t + \varphi_i), \quad \varphi_i = (2\pi K/\bar{n})(i-1) \quad (6)$$

式中: K 为激振力阶次, $\bar{n}$ 为叶片数。

图 3 和图 4 中分别给出了系统在共振和非共振两种工况下的响应曲线(时域和频域)。从图中可以看出: (1) 在共振情况下摩擦力在时域呈高度非对称性; (2) 摩擦力的频率成份包括了激振频率的多次倍频。这说明按仅取激振频率一次谐波的谐波平衡法计算是不够的。

在计算中我们考虑的是协调系统(即每一子结构的特性参数相同)并且假设了粘滞阻尼为比例粘滞阻尼。

为了检验方法及计算程序的准确程度, 我们将用 AFT 方法获得的系统位移稳态响应与直接积分法的结果进行了比较。图 5 给出了用两种方法获得的系统位移在 x, y 方向的时间历程。结果表明引入变量多谐波表达式的 AFT 方法与直接积分法的误差是完全可以接受的。引

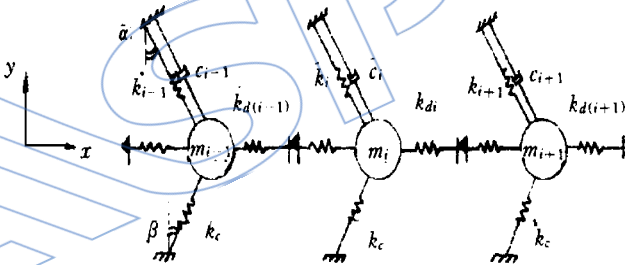


图 2 带冠叶盘二维子结构循环模型

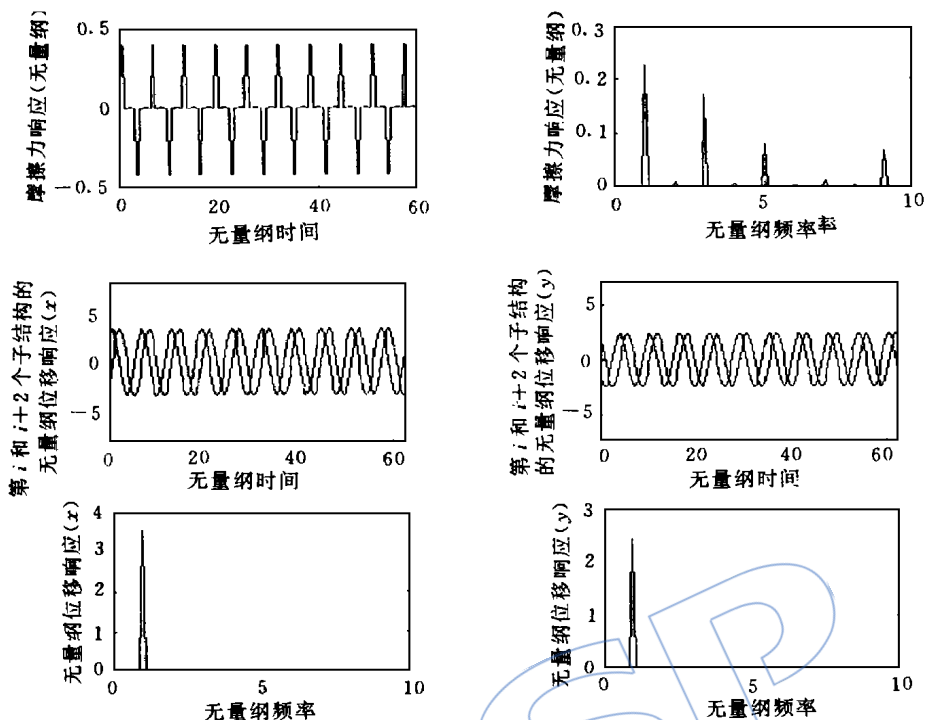


图 3 非共振工况系统的摩擦力及位移响应(系统参数为: $\bar{n}=8$, $\beta=\pi/4$, $\gamma=1$, $\mu=0.2$, $\xi=0.01$, $\Omega=0.9$, $R_d=0.1$, $R_c=0.25$, ($\Omega=\omega/\omega_0$, $\omega_0^2=k_i/m_i$, $R_d=k_d/k_i$, $R_c=k_c/k_i$, $\gamma=f_{ni}/N_0$, ξ 为粘滞阻尼比))

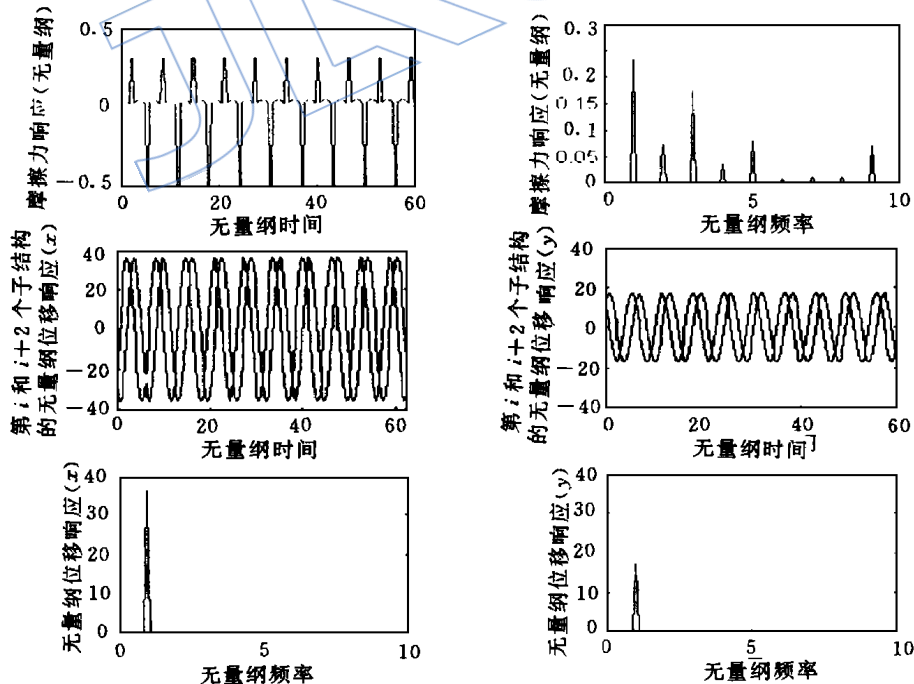


图 4 共振工况系统的摩擦力及位移响应(系统参数为: $\bar{n}=8$, $\beta=\pi/4$, $\gamma=1$, $\mu=0.2$, $\xi=0.01$, $\Omega=1.013$, $R_d=0.1$, $R_c=0.25$, ($\Omega=\omega/\omega_0$, $\omega_0^2=k_i/m_i$, $R_d=k_d/k_i$, $R_c=k_c/k_i$, $\gamma=f_{ni}/N_0$, ξ 为粘滞阻尼比))

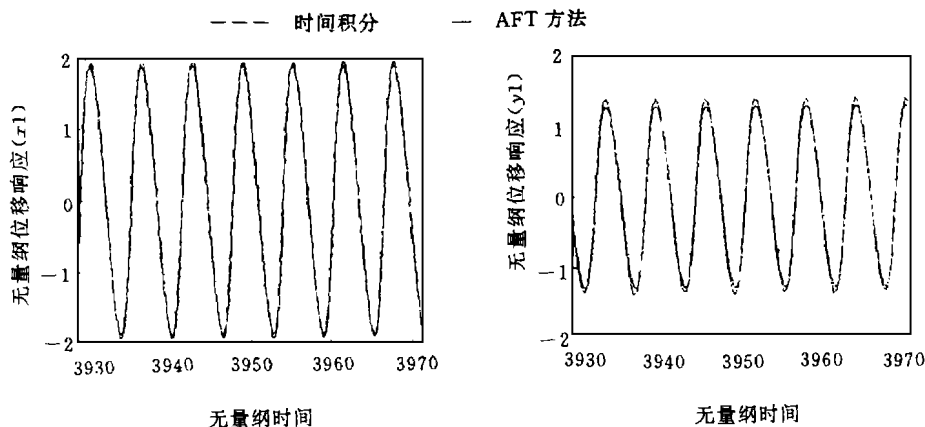


图 5 用 AFT 方法和直接积分法计算的位移响应曲线的比较

(系统参数: $\bar{n}=4$, $R_d=0.1$, $R_c=0.25$, $\alpha=\pi/3$, $\beta=\pi/4$, $\xi=0.1$, $\Omega=0.9$)

入变量多谐波表达式的 AFT 方法使我们可进一步对带冠叶盘系统做深入研究,特别是能方便地进行与实验研究相配合的参数研究。

5 结 论

AFT 方法由于既不与非线性变量中的谐波数有关,也不与系统中摩擦单元的个数有关,因此可以认为是求解非线性系统动态响应的一种较为通用有效的方法。但是值得注意的是,并不能由于假设了系统具有周期解而忽略了 FFT 中泄漏误差的影响,应考虑到系统中与响应有关的所有变量均有可能具有多谐波特性,忽略了这一点会引起迭代失败。本文提出的限制泄漏误差随迭代发散的方法,适用于变量具有多谐波特性的非线性系统。

参 考 文 献

- 1 Pierre C, Feri A A, Dowell E H. Multi-Harmonic Analysis of Dry Friction Damped System Using an Incremental Harmonic Balance Method. ASME Journal of Applied Mechanics Vol. 52, 1985
- 2 Cameron T M, Griffin J H. An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic System. ASME Journal of Applied mechanics, Vol. 56, march 1989

(责任编辑 王震华)

sults shows that the effect of the active control is remarkable, and the computational method is feasible.

Key Words Shape memory alloys Active Control Cracks

IMPACT- RUB MODEL AND CHAOTIC FEATURE OF PARTIAL RUB OF ECCENTRIC ROTOR

Liu Xiandong and Li Qihan

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT A general impact- rub model is established according to the classical impact theory. Then the suitable impact- rub model for aeroengine is found out. Two special examples of this general model are analyzed. The impact- rub dynamic equations of an eccentric and unbalanced rotor system are derived, which take the stiffness of stator into account. The equations are calculated numerically and the results are analyzed. The results reveal that the system possesses varied chaotic motions and bifurcation phenomena, besides periodic and quasi- periodic vibrations. The chaotic motions and related phenomena discovered in the impact- rub fault of the eccentric rotor system can be taken as its remarkable features and serve as symptoms to diagnose the impact- rub fault.

Key Words Rotors Rub Models Chaos Bifurcation

A SOLUTION FOR DYNAMIC RESPONSE OF SHROUDED BLADED DISC WITH COULOMB DAMPING

Li Lin

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT The paper deals with dynamic response solution problem of shrouded bladed disc assemblies with dry friction. A hypothesis of multi- harmonic variables has been introduced into AFT method, so that its divergence problem due to alias and leakage error in iteration has been solved. This improved AFT method is independent of the harmonic number in variables of the friction number elements in the system. So it is a general method for solving dynamic response of a non- linear system. A model of cyclic two- dimensional substructure for a bladed disc has been calculated by this method, and the results have been compared with those of the direct integration method.

Key Words Non- linear systems Vibration Responses Friction Damping

A COMPUTER- AIDED COMPLEX 3D PIPING SYSTEM

Fan Jiang and Ma Mei

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT A computer- aided piping system has been researched and established for complex 3D plumbing system on aircraft engine. This system is based on the user- defined pipe object and realizes piping on aircraft engine casing with same or different ge-